Über eine besondere zwei-zweideutige Verwandtschaft.

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

verfasst und

der hohen philosophischen Fakultät Sektion II

der k. Ludwig-Maximilians-Universität München

am 21. Januar 1903

vorgelegt von

Joseph Wagner.

München 1903
Dr. H. Lüneburg's Sort. u. Ant. (E. Reinhardt)
Karlsstr. 4.

Über eine besondere zwei-zweideutige Verwandtschaft.

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

verfasst und

der hohen philosophischen Fakultät Sektion II

der k. Ludwig-Maximilians-Universität München

am 21. Januar 1903

vorgelegt von

Joseph Wagner.

München 1903
Dr. H. Lüneburg's Sort. u. Ant. (E. Reinhardt)
Karlsstr. 4.

Es soll die zwei-zweideutige geometrische Verwandtschaft zweier ebenen Systeme S und $\mathfrak{S}$ untersucht werden, die durch folgende Beziehungen definiert ist:

In einer Ebene seien vier Punkte $\Phi, \Phi', \mathrm{P}, \mathfrak{P}$ und ein durch die Punke P und $\mathfrak{P}$ gehender Kreis π gegeben. Werden dann durch einen beliebigen Punkt Π des Kreises π die Geraden $\mathrm{P}\Pi$ und $\mathfrak{P}\Pi$ gezogen und wird ein beliebiger durch die Punkte Φ und Φ' gehender Kreis beschrieben, der die Geraden $\mathrm{P}\Pi$ und $\mathfrak{P}\Pi$ bezw. in den Punktpaaren A, A' und $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ schneidet, so entspricht dem Punktpaar A, A' des Systemes S das Punktpaar $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ des Systemes $\mathfrak{S}$ und umgekehrt.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549027_0061

§ 1. Einleitung.

Die zwei-zweideutige Verwandtschaft, die im folgenden betrachtet werden soll, ordnet, von besonderen sogleich näher zu besprechenden Fällen abgesehen, jedem Punkt A des Systemes S zwei Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ des Systemes $\mathfrak{S}$ zu, die im übrigen noch reell getrennt, zusammenfallend oder konjugiert imaginär sein können.*) Jedem dieser Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ entsprechen umgekehrt auch zwei Punkte des Systemes S, und zwar dem Punkte $\mathfrak{A}$ wie dem Punkte $\mathfrak{A}'$ dieselben beiden Punkte. Von diesen ist einer der frühere A, der andere A' hat die Eigenschaft, dass ihm im Systeme $\mathfrak{S}$ dieselben zwei Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ entsprechen, die auch dem Punkte A entsprechen.**) Die Punkte A unb A', ebenso $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ mögen zugeordnete Punkte desselben Systemes genannt werden. Für die Art der Transformation bleibt es gleichgültig, ob die zu transformierenden Punkte oder Kurven dem Systeme S oder $\mathfrak{S}$ angehören; um Kürze des Ausdrucks zu erzielen, erscheint es daher vorteilhaft, sie für die Folge immer im selben Systeme, etwa in S, anzunehmen und demgemäss alle die Sätze, die für Transformation aus $\mathfrak{S}$ in S in gleicher Weise wie für Transformation aus S in $\mathfrak{S}$ Geltung haben, auch bloss für Transformation aus S in $\mathfrak{S}$ auszusprechen.

Hievon ist jedoch wohl zu unterscheiden eine eigentliche Rücktransformation. Wird nämlich irgend eine Kurve (A) transformiert in eine Kurve $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$,***) so besteht zwischen den beiden Kurven im allgemeinen bloss eine (1,2) = Korrespondenz, d. h. einem jedem Punkt der Originalkurve entsprechen zwei Punkte der Transformationskurve, einem jeden Punkt der Transformationskurve entspricht umgekehrt bloss ein Punkt der Originalkurve. Wird aber diese Kurve $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ rücktransformiert, so entspricht ihr eine Kurve (A, A'), und nun hat man (2,2) = Korrespondenz;

---

*) Vom projektivischen Standpunkte aus macht dies keinen Unterschied; es soll deshalb in der Folge überhaupt nicht mehr besonders hervorgehoben werden.

**) Die allgemeine zwei-zweideutige Verwandtschaft zweier ebenen Systeme S und $\mathfrak{S}$ ist einzig dadurch charakterisiert, dass einem jeden Punkte des einen Systemes zwei Punkte des anderen Systemes entsprechen. Stehen nun so dem Punkte A die beiden Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ als entsprechende gegenüber, so entspricht umgekehrt auch jedem der Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ derselbe Punkt A, ausserdem aber jedem von ihnen noch ein zweiter Punkt, und zwar wird im allgemeinen der zweite Punkt, der $\mathfrak{A}$ entspricht, ein anderer sein als der zweite Punkt, der $\mathfrak{A}'$ entspricht. Insofern bei unserer Verwandtschaft diese beiden zweiten Punkte identisch sind, die Verwandtschaft also ein eindeutiges Entsprechen von Punktpaaren vermittelt, ist unsere Verwandtschaft bereits ein sehr spezieller Fall der allgemeinen zwei-zweideutigen Verwandtschaft, wie sie eben definiert wurde.

***) Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass einer stetigen Folge von Punkten wieder eine stetige Folge von Punkten entsprechen muss.

die Kurve (A, A') zerfällt in zwei Kurven (A) und (A'), die unter sich in (1,1) = Korrespondenz stehen. Von einer solchen Rücktransformation soll jedoch vorläufig abgesehen werden.

Bei den Punkten Φ, Φ' den unendlich fernen Kreispunkten Ψ, Ψ' ebenso bei P und $\mathfrak{P}$ möge dort, wo es nötig ist, durch Indices S bezw. $\mathfrak{S}$ angedeutet werden, als zu welchem Systeme gehörig sie im einzelnen Falle aufzufassen sind; z. B. Φ_S, $\Phi_{\mathfrak{S}}$ u. s. f.

Im wesentlichen wird man auf zwei besondere Umstände sein Augenmerk zu richten haben:

1. Punkten, die auf demselben Kreise des Büschels $\Phi\,\Phi'$ liegen, entsprechen Punkte auf dem gleichen Kreise des Büschels;

2. Punkten, die auf einem Strahl durch P liegen, entsprechen Punkte, die auf einem Strahl durch $\mathfrak{P}$ liegen.

Hieran lassen sich sofort einige Bemerkungen knüpfen.

1. Unter den unendlich vielen Kreisen des Büschel $\Phi\,\Phi'$ gibt es drei zerfallende; von diesen ist jedoch bloss einer reel, nämlich das Geradenpaar, das sich zusammensetzt aus der Radicalaxe $\Phi\,\Phi'$ des Büschels und der unendlich fernen Geraden. Punkte nun, die auf diesem zerfallenden Kreise liegen, transformieren sich in Punktpaare, die auf dem gleichen Kreise liegen, und zwar liegt immer der eine Punkt des Paares auf der Radicalaxe, der andere auf der unendlich fernen Geraden. Ist ein auf diesem zerfallenden Kreis gelegener Punkt A reell, so werden die zugehörige PΠ und die dieser entsprechende $\mathfrak{P}\Pi$ gleichfalls reell, dann sind aber auch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ reell; ist A imaginär, so ist auch die zugehörige PΠ imaginär, daher auch die dieser entsprechende $\mathfrak{P}\Pi$; in diesem Falle sind also $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ imaginär; man erhält auf diese Weise den Satz:

Jedem reellen unendlich fernen sowie jedem reellen auf der Radicalaxe gelegenen Punkt entspricht ein reeller unendlich ferner und ein reeller auf der Radicalaxe gelegener Punkt; jedem imaginären unendlich fernen sowie jedem imaginären auf der Radicalaxe gelegenen Punkt entspricht ein imaginärer unendlich ferner und ein imaginärer auf der Radicalaxe gelegener Punkt.

Hiebei ist jedoch (aus Gründen, die in § 2 hervortreten werden) von den vier Grundpunkten des Kreisbüschels noch abzusehen, ebenso von P, falls P etwa zufällig auf der Radicalaxe des Büschels liegen sollte.

Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, dass man vermittelst desselben leicht erkennt, wie viele von den unendlich fernen Punkten einer durch Transformation zu erhaltenden Kurve reell sind; man übersieht leicht, wie sich diese unendlich fernen Punkte selbst durch eine einfache Konstruktion bestimmen lassen.

Die drei zerfallenden Kreise des Büschels sind die einzigen mit Doppelpunkt; um die hiedurch entstehenden Verwickelungen, die doch nicht von besonderem Interesse sind, zu vermeiden, sei für die ganze Folge festgesetzt, dass von den zu transformierenden

Kurven keine weder durch einen dieser drei Doppelpunkte zerfallender Kreise des Büschels gehe, noch durch einen derjenigen Punkte des Systemes S, denen im Systeme $\mathfrak{S}$ ein solcher Doppelpunkt entspricht.

2. Wenn Punkten auf einer durch P gehenden Geraden l allemal Punkte entsprechen, die auf einer durch $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden $\mathfrak{l}$ liegen, so muss ein Punkt von l, der Coïncidenzpunkt sein soll, mindestens zugleich auch Punkt von $\mathfrak{l}$ sein d. h. von den sämtlichen Punkten der Geraden l kann bloss der Schnittpunkt mit der Geraden $\mathfrak{l}$ als Coïncidenzpunkt überhaupt nur in Frage kommen, wenn man auch hier von P selbst zunächst absieht. Der Schnittpunkt von l und $\mathfrak{l}$ ist aber kein anderer als der Punkt H, in welchem der Kreis π von von l geschnitten wird; und es ist klar, dass dieser auch wirklich Coïncidenzpunkt ist. Man kann demnach sagen:

Die sämtlichen Punkte des Kreises π und nur diese sind Coïncidenzpunkte der Transformation.*)

Mit diesen Bemerkungen ist die Fruchtbarkeit der beiden obenstehenden Sätze nicht erschöpft, vielmehr lässt sich, wie die Folge ergeben wird, jeder dieser Sätze für sich zur Herleitung weiterer Sätze verwerten; ein besonderer Vorteil entspringt jedoch noch aus dem Zusammenbestehen beider Sätze: einerseits kann man derart transformieren, dass man von den Schnittpunkten der Originalkurve mit irgend einem Kreis des Büschels ausgeht und diesen Kreis das ganze Büschel durchlaufen lässt, andererseits derart, dass man von den Schnittpunkten der Originalkurve mit irgend einem durch P gehenden Strahl ausgeht und diesen Strahl das ganze Strahlbüschel durchlaufen lässt, dessen Träger P ist. Es wird sehr nützlich sein, in den einzelnen zur Beantwortung stehenden Fragen möglichst von beiden Auffassungen Gebrauch zu machen.

§ 2. Fundamentalpunkte.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass einem Punkte A im allgemeinen zwei Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ entsprechen; es fragt sich jedoch, ob dies durchweg der Fall ist, oder ob es nicht Punkte gibt, denen weniger oder mehr als zwei Punkte entsprechen. Der Fall, dass einem Punkte A weniger als zwei Punkte entsprechen, kann offenbar niemals eintreten: denn welchen Punkt des Systemes S man auch betrachten mag, immer geht durch ihn mindestens ein Kreis des Büschels und mindestens eine Gerade durch P (und im allgemeinen auch nur ein solcher Kreis und nur eine solche Gerade); da jeder Geraden durch P eine Gerade durch $\mathfrak{P}$ ent-

*) Daraus folgt jedoch keineswegs, dass die Transformationskurve auch nur durch diejenigen Punkte von π geht, durch welche die Originalkurve geht. Wie es sich in dieser Beziehung verhält, wird später klar werden.

spricht, so sind die einem Punkte A entsprechenden die Schnittpunkte mindestens eines Kreises mit mindestens einer Geraden, demnach sicherlich nicht weniger als zwei. Punkte hingegen, denen mehr als zwei Punkte entsprechen, werden alle diejenigen und nur diejenigen sein, durch die entweder mehr als ein Kreis des Büschels oder mehr als eine Gerade durch P gehen. Mehr als ein Kreis des Büschels geht durch jeden der vier Grundpunkte des Büschels, mehr als eine Gerade durch P geht durch P selbst. Da durch jeden dieser fünf Punkte unendlich viele Kreise bezw. unendlich viele Geraden gehen, so entsprechen jedem derselben nicht bloss mehr als zwei Punkte, sondern sogar unendlich viele; es handelt sich bloss noch um deren Lage.

Um zu bestimmen, wie sich Φ transformiert, verbinde man Φ mit P; diese Verbindungslinie schneidet aus π einen Punkt Π aus, der mit $\mathfrak{P}$ zu verbinden ist; auf dieser Verbindungsgeraden $\mathfrak{P}\Pi$ müssen dann alle die Punkte liegen, die Φ entsprechen. Andererseits geht durch Φ jeder Kreis des Büschels; jeder solche Kreis des Büschels schneidet unsere $\mathfrak{P}\Pi$ in zwei Punkten; es gibt auf $\mathfrak{P}\Pi$ keinen Punkt, der nicht von einem Kreis des Büschels ausgeschnitten würde; es gibt auch keinen, der von mehr als einem Kreis des Büschels ausgeschnitten würde; man kann daher sagen: Dem Punkte Φs entsprechen die sämtlichen Punkte unserer Geraden $\mathfrak{P}\Pi$, und zwar in einfacher Zählung. Diese Gerade $\mathfrak{P}\Pi$ sei mit $\mathfrak{g}\Phi$ bezeichnet.

Ebenso entsprechen dem Punkte Φ's die sämtlichen einfach gezählten Punkte einer gewissen durch $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden $\mathfrak{g}\Phi'$.

Beim Punkte Ψ tritt die Besonderheit ein, dass er nicht bloss Grundpunkt des Kreisbüschels ist, sondern auch dem Kreise π angehört. Der Schnittpunkt Π fällt demnach hier auf Ψ selbst; daher müssen zunächst alle Punkte, die Ψs entsprechen sollen, auf $\mathfrak{P}\Psi$ liegen. Durch Ψ gehen alle Kreise des Büschels; jeder derselben schneidet $\mathfrak{P}\Psi$ in zwei Punkten, von denen jedesmal einer nach Ψ fällt; der Punkt Ψ wird also unendlich oft ausgeschnitten; es gibt auf $\mathfrak{P}\Psi$ keinen Punkt, der nicht ausgeschnitten würde, aber auch ausser Ψ keinen, der von mehr als einem Kreis des Büschels ausgeschnitten würde; man kann daher sagen: Dem Punkte Ψs entsprechen die sämtlichen Punkte von $\mathfrak{P}\Psi$, und zwar Ψ selbst unendlich oft, alle übrigen Punkte in einfacher Zählung. — Diese Gerade $\mathfrak{P}\Psi$ werde mit $\mathfrak{g}\Psi$ bezeichnet.

Ebenso entsprechen dem Punkte Ψ' die sämtlichen Punkte der Geraden $\mathfrak{g}\Psi' \equiv \mathfrak{P}\Psi'$, und zwar Ψ' unendlich oft, alle übrigen Punkte in einfacher Zählung.*)

Um die Gesamtheit der dem Punkte Ps entsprechenden Punkte zu bestimmen, ist zunächst P als Punkt des Systemes S

*) Das gleiche würde übrigens auch für Φ bezw. Φ' gelten, falls etwa einer dieser Punkte auf π liegen sollte, welch besonderen Fall wir ausschliessen,

zu verbinden mit P als einem festen Punkte des Kreises π. Es ist klar, dass jede durch P gehende Gerade als derartige Verbindungslinie aufgefasst werden kann (ohne dass irgendeine irgendwie bevorzugt wäre); die dem Punkte P s entsprechenden können infolgedessen liegen auf allen Geraden, die durch $\mathfrak{P}$ gehen. Andererseits müssen die dem Punkte P s entsprechenden auf dem durch P gehenden Kreis des Büschels liegen; dieser Kreis wird aber von jeder durch $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden in zwei Punkten geschnitten; es gibt auf dem Kreise $\Phi\Phi' P$ keinen Punkt, der nicht von einer durch $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden ausgeschnitten würde, aber auch keinen, der von mehr als einer derartigen Geraden ausgeschnitten würde;*) man kann daher sagen: Dem Punkte P s entsprechen die sämtlichen Punkte des Kreises $\Phi\Phi'\mathfrak{P}$, und zwar alle in einfacher Zählung. — Dieser Kreis sei mit f_P bezeichnet.

Im anderen Systeme steht diesem Satz der folgende gegenüber: Dem Punkte $\mathfrak{P}$ S entsprechen die sämtlichen Punkte des Kreises $k_{\mathfrak{P}}$ $\Phi\Phi'\mathfrak{P}$, und zwar alle in einfacher Zählung.

Da durch $\mathfrak{P}$ sowohl ein ganz bestimmter Kreis des Büschels als auch eine ganz bestimmte Gerade durch P geht, so nimmt $\mathfrak{P}$ s in keiner Weise eine Sonderstellung ein, wie man ohne diese Überlegung vielleicht vermuten könnte; in der Tat tritt dies deutlich hervor, sobald man die bei P s angestellte Betrachtung auf $\mathfrak{P}$ s zu übertragen versucht. Um nämlich die Punkte zu bestimmen, die $\mathfrak{P}$ s entsprechen, hat man $\mathfrak{P}$ s zu verbinden mit P; diese Verbindungsgerade schneidet auf π den Punkt Π aus, der hier auf $\mathfrak{P}$ selbst fällt; dieser Punkt Π ist mit $\mathfrak{P}$ zu verbinden. Also auch hier fallen zwei unter sich zu verbindende Punkte in einen zusammen, aber sie fallen zusammen als Punkte desselben Kreises π: ihre Verbindungslinie ist daher die in $\mathfrak{P}$ an den Kreis π gehende Tangente. Dem Punkte $\mathfrak{P}$ s kommt demnach keine Sonderstellung zu.

Die vier Grundpunkte Φ, Φ', Ψ, Ψ' des Kreisbüschels und der Punkt P nehmen also im Systeme S die Stellung ein von Punkten, wie man sie allgemein bei Verwandtschaften als Fundamentalpunkte zu bezeichnen pflegt. Im Systeme $\mathfrak{S}$ sind ebenso Fundamentalpunkte der vier Grundpunkte Φ, Φ', Ψ, Ψ' des Kreisbüschels und der Punkt $\mathfrak{P}$. Diesen fünf Fundamentalpunkten kommen demnach auch alle die Besonderheiten zu, die den Fundamentalpunkten der Verwandtschaften überhaupt eigen sind. Bei den häufig behandelten eindeutigen Transformationen ist die Kurve, die einem Fundamentalpunkte zunächst als entsprechend zuzuweisen ist, geometrischer Ort desjenigen Punktes, der einem auf den Fundamentalpunkt fallenden Punkt einer stetigen Originalkurve in der eindeutigen Beziehung zwischen Original- und Trans-

*) Es ist hier und überhaupt für die ganze Folge vorausgesetzt, dass der durch P gehende Kreis des Büschels nicht auch durch $\mathfrak{P}$ gehe.

formationskurve entspricht. Die wirkliche Lage des Punktes auf diesem Ort hängt ausschliesslich und eindeutig ab von der Richtung, in der die Originalkurve durch den bezüglichen Fundamentalpunkt geht. Ist die Verwandtschaft zweideutig, so sind es auf der einem Fundamentalpunkt zuzuweisenden Kurve zwei Punkte, die dem Fundamentalpunkte entsprechen: deren Lage hängt auch bei zweideutiger Transformation bloss ab von der Richtung, die der Originalkurve im Fundamentalpunkte zukommt. Die Art und Weise der Abhängigkeit ist verschieden je nach der Verwandtschaft; im vorliegenden Falle ist leicht zu übersehen: Das einem Grundpunkte des Kreisbüschels entsprechende Punktpaar wird auf der dem Grundpunkt zugewiesenen Geraden g ausgeschnitten von demjenigen Kreise des Büschels, der die Originalkurve im betreffenden Grundpunkte berührt; das dem Punkte P entsprechende Punktpaar wird auf dem Kreise k_P ausgeschnitten von derjenigen durch $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden, die der in P die Originalkurve berührenden Tangente als entsprechende gegenübersteht. — Indem so einem Fundamentalpunkt jeder Punkt des ihm zugewiesenen Ortes entsprechen kann und je nach der Richtung, in der die Originalkurve durch den betreffenden Fundamentalpunkt geht, auch wirklich entspricht, sind die Durchgänge der Originalkurve durch einen Fundamentalpunkt mit Durchgängen der Transformationskurve durch Punkte der dem Fundamentalpunkt zugewiesenen Kurve in einfacher Weise verknüpft; das gleiche findet aber auch statt, wenn man von den Fundamentalpunkten des Systemes $\mathfrak{S}$ ausgeht, d. h. entsprechend dem, was allgemein nach der Theorie mehrdeutigen Transformationen der Fall ist, gelten auch hier die Sätze:

Es existieren im Systeme S vier durch P gehende Geraden g, von denen jede einem Grundpunkte des Kreisbüschels zugewiesen ist, mit der folgenden Eigenschaft: jedem Punkte einer derartigen g, den Punkt P zunächst ausgenommen, entsprechen in $\mathfrak{S}$ zwei Punkte, von denen einer jedesmal auf den der Geraden g zugewiesenen Grundpunkt fällt; von den zwei Punkten, die dem Punkte P entsprechen, rückt bloss dann einer auf den Grundpunkt selbst, wenn die diesem Grundpunkt zugewiesene Gerade g in P Tangente an die Originalkurve ist.

Jedem Punkte des durch $\mathfrak{P}$ gehenden Kreises $k_{\mathfrak{P}}$, die vier Grundpunkte des Kreisbüschels zunächst ausgenommen, entsprechen in $\mathfrak{S}$ zwei Punkte, von denen einer jedesmal nach $\mathfrak{P}$ fällt; von den zwei einem Grundpunkte entsprechenden Punkten rückt bloss dann einer auf $\mathfrak{P}$, wenn die in diesem Grundpunkt an die Originalkurve gehende Tangente zugleich auch Tangente des Kreises $k_{\mathfrak{P}}$ ist.

Vermittelst der vorstehenden Sätze lässt sich bestimmen, wie oft die Transformationskurve durch jeden Fundamentalpunkt ihres Systemes geht.

Sei eine Kurve n^{ter} Ordnung zu transformieren, von der wir zunächst voraussetzen, sie gehe durch keinen Fundamentalpunkt. Dieselbe wird beispielsweise von $g\varphi$ in n Punkten geschnitten. Jedem dieser n Punkte entsprechen in Σ zwei Punkte, von denen immer einer nach Φ fällt; durchläuft also ein veränderlicher Punkt Z die Originalkurve, so geht von den zwei ihm entsprechenden jedesmal einer durch Φ hindurch, so oft der Punkt Z die $g\varphi$ schneidet; dies tritt aber n mal ein; demnach ist Φ ein n facher Punkt der Transformationskurve. — Voraussetzung war hiebei, dass von den n zu transformierenden Punkten der Geraden $g\varphi$ keiner auf einem Fundamentalpunkt liege; es muss also noch besonders untersucht werden, wie sich die Sache verhält, wenn die Originalkurve durch P geht (Durchgänge der Originalkurve durch Grundpunkte des Kreisbüschels bleiben hier offenbar einflusslos, weil $g\varphi$ durch keinen solchen Grundpunkt geht*). Wir nehmen zunächst an, die Originalkurve gehe einmal durch P. Dann entsprechen dem vorausgehenden zufolge den n—1 übrigen Schnittpunkten von $g\Phi$ und Originalkurve n—1 Durchgänge der Transformationskurve durch Φ; die zwei dem Kurvenpunkt P entsprechenden Punkte liegen immer auf demjenigen Strahl $\mathfrak{P}H$, welcher der in P an die Originalkurve gehenden Tangente PH entspricht. Es ist klar, dass dieser Strahl $\mathfrak{P}H$ nur dann auf auf $\mathfrak{P}\varphi$ fällt, wenn $g\Phi$ gerade Tangente an die Originalkurve in P ist. In diesem Falle entspricht dem Durchgange der Originalkurve durch P allerdings ein Durchgang der Transformationskurve durch Φ, während in jedem anderen Falle von den dem Punkte P entsprechenden zwei Punkten keiner auf Φ zu liegen kommt; indessen, wenn $g\Phi$ in P Tagente an die Originalkurve ist, so hat $g\Phi$ mit der Originalkurve nur noch n—2 weitere Schnittpunkte, also auch in diesem Falle ist n—1 die Zahl, die angibt, wie oft die Transformationskurve durch Φ geht. Man ersieht sofort, dass für jeden weiteren Durchgang der Originalkurve durch P sich dieselbe Betrachtung anstellen lässt, ferner dass für Φ' genau dasselbe gilt wie für Φ. Auch betreffs der Durchgänge der Transformationskurve, die durch Ψ erfolgen, zeigt die vorstehende Überlegung: ein jeder Durchgang der Originalkurve durch den Punkt P der Geraden $g\varphi$ veranlasst nicht einen Durchgang der Transformationskurve durch Ψ; jedem weiteren Schnittpunkt von $g\Phi$ mit der Originalkurve, den Punkt Ψ eingeschlossen, wenn und so oft er überhaupt Punkt der Originalkurve ist, entspricht jedoch ein Durchgang der Transformationskurve durch Ψ, selbst dann noch, wenn von diesen weiteren Schnittpunkten irgendwelche auf $g\varphi$ unendlich an P herangerückt sind. Das gleiche gilt füz Ψ'; man kann daher den Satz aussprechen:

*) Es ist hier und fü. die Folge voraus gesetzt, dass weder $g\Phi$ durch Φ noch $g\Phi'$ durch Φ geht. Beide Voraussetzungen sind von einander unabhängig.

Wird eine Kurve n^{ter} Ordnung transformiert, so geht die Transformationskurve n mal durch jeden der vier Grundpunkte des Kreisbüschels; doch wird diese Zahl n für jeden Durchgang der Originalkurve durch P um 1 vermindert.

Eine den Geraden g analoge ausgezeichnete Stellung kommt dem Kreis $k_{\mathfrak{P}}$ zu. Dieser Kreis wird von der Originalkurve in 2n Punkten geschnitten; geht die Originalkurve a mal durch Φ, b mal durch Φ', c mal durch jeden der unendlich fernen Kreispunkte, so entspricht jedem der $2n - a - b - 2c$ weiteren Schnittpunkte mit $k_{\mathfrak{P}}$ ein Durchgang der Transformationskurve durch $\mathfrak{P}$, selbst dann noch, wenn von diesen weiteren Schnittpunkten irgendwelche auf $k_{\mathfrak{P}}$ an Grundpunkte des Kreisbüschels unendlich nahe herangerückt sind; Durchgänge der Originalkurve durch Grundpunkte des Kreisbüschels haben dagegen nicht Durchgänge der Transformationskurve durch $\mathfrak{P}$ zur Folge; es gilt daher der Satz:

Wird eine Kurve n^{ter} Ordnung transformiert, so geht die Transformationskurve 2n mal durch $\mathfrak{P}$; doch wird diese Zahl 2n für jeden Durchgang der Originalkurve durch irgend einen Grundpunkt des Kreisbüschels um 1 vermindert.

Nach dem Vorhergehenden entspricht jedem Durchgang der Originalkurve durch irgend einen Punkt des Kreises $k_{\mathfrak{P}}$ ein Durchgang der Transformationskurve durch den Punkt $\mathfrak{P}$; die besondere Lage des Originalpunktes auf dem Kreise $k_{\mathfrak{P}}$ ist also in Bezug auf die Lage des Transformationspunktes nicht von Einfluss, wohl aber bestimmt sie die Richtung, in der die Transformationskurve durch $\mathfrak{P}$ geht. Es gilt nämlich der Satz:

Wird der durch $\mathfrak{P}$ gehende Kreis des Büschels von der Originalkurve in einem Punkte U geschnitten, so entspricht dem Durchgang der Originalkurve durch U ein Durchgang der Transformationskurve durch $\mathfrak{P}$,*) und zwar erfolgt dieser Durchgang durch $\mathfrak{P}$ in Richtung derjenigen Geraden $\mathfrak{P}H$, die der Geraden PU entspricht; die Richtung, in der die Transformationskurve durch $\mathfrak{P}$ geht, hängt demnach ausschliesslich ab von der Lage des Punktes U auf dem Kreis $k_{\mathfrak{P}}$, in keiner Weise auch von der Richtung, in der die Originalkurve durch U geht.

Dieser Satz ergibt sich durch einfache Umkehrung dessen, was über Transformation des Punktes $\mathfrak{P}_3$ bereits feststeht. In gleicher Weise erhält man bezüglich der Grundpunkte des Kreisbüschels den Satz:

Wird eine der vier Geraden g von der Originalkurve in einem Punkte U geschnitten, so entspricht dem Durchgang der Originalkurve durch U ein Durchgang der Transformationskurve durch den Grundpunkt, dem die Gerade g eben zugewiesen ist, und zwar erfolgt dieser Durchgang in Richtung desjenigen dem

*) Ausserdem noch ein weiterer Durchgang der Transformationskurve durch den Kreis $k_{\mathfrak{P}}$, der aber hier nicht in Betracht kommt.

Büschel angehörigen Kreises, der durch U geht; die Richtung in der die Transformationskurve durch den bezüglichen Grundpunkt geht, hängt demnach ausschliesslich ab von der Lage des Punktes U, in keiner Weise auch von der Richtung, in welcher die Originalkurve durch U geht.

Vorausgesetzt ist hiebei, dass durch U sowohl ein ganz bestimmter Kreis des Büschels, als auch eine ganz bestimmte Gerade durch P geht. Der Satz ist demnach bewiesen für alle Punkte der vier Geraden g mit alleiniger Ausnahme von P, Φ, Φ'. Betreffs des Punktes P ist das nötige bereits auseinandergesetzt: bei Transformation von Φ und Φ' ist zu beachten, dass ein unendlich ferner Kreispunkt auf demjenigen Kreise des Büschels transformiert wird, der die Originalkurve im bezüglichen Kreispunkt gerade berührt. Dies führt zu dem Satze:

Einem Durchgang der Originalkurve durch einen unendlich fernen Kreispunkt entspricht ein Durchgang der Transformationskurve durch denselben unendlich fernen Kreispunkt, und zwar findet dieser Durchgang der Transformationskurve in derselben Richtung statt wie der Durchgang der Originalkurve.

§ 3. Ordnungszahl.

Mit Hilfe der bisherigen Entwickelungen gelingt es leicht, den Zusammenhang zwischen der Ordnung der Originalkurve und der Ordnung der Transformationskurve zu bestimmen.

Sei zunächst vorausgesetzt, die Originalkurve von der Ordnung n gehe durch keinen der Fundamentalpunkte Wir ziehen durch $\mathfrak{P}$ eine Gerade $\mathfrak{P}II$ und sehen zu, wie oft dieselbe von der Transformationskurve geschnitten wird. Da $\mathfrak{P}$ ein 2n facher Punkt der Transformationskurve ist, so hat $\mathfrak{P}II$ in $\mathfrak{P}$ 2n Schnittpunkte mit der Transformationskurve: PII schneidet die Originalkurve in n Punkten, jedem derselben entsprechen auf $\mathfrak{P}II$ zwei Punkte, den n Punkten demnach 2n Punkte. Es hat also jede beliebig durch $\mathfrak{P}$ gehende Gerade mit der Transformationskurve $2n + 2n = 4n$ Schnittpunkte d. h. die Transformationskurve ist von der Ordnung 4n.

Die Originalkurve gehe nunmehr einmal durch einen Grundpunkt des Kreisbüschels, etwa durch Φ. Dann ist $\mathfrak{P}$ bloss noch ein $(2n-1)$facher Punkt der Transformationskurve; den n Schnittpunkten von PII mit der Originalkurve entsprechen wiederum 2n Schnittpunkte von $\mathfrak{P}II$ mit der Transformationskurve; jede beliebig durch $\mathfrak{P}$ gehende Gerade $\mathfrak{P}II$ (die Gerade $g\Phi$ mit eingeschlossen) hat demnach mit der Transformationskurve im ganzen $2n-1+2n = 4n-1$ Schnittpunkte d. h. die Transformationskurve hat in diesem Falle die Ordnungszahl $4n-1$.

Die vorstehende Überlegung lässt erkennen, dass für jeden Durchgang der Originalkurve durch einen Grundpunkt des Kreis-

büschels die im allgemeinen als Ordnung der Transformationskurve gefundene Zahl 4n um 1 vermindert wird. Doch ist hiebei vorausgesetzt, dass die Originalkurve nicht auch durch P gehe.

Die Originalkurve gehe nunmehr durch keinen Grundpunkt des Kreisbüschels, aber einmal durch P. Wir wählen einen ganz beliebigen Kreis λ des Büschels und sehen zu, wie oft derselbe von der Transformationskurve geschnitten wird. Die Originalkurve geht einmal durch P, die Transformationskurve geht infolgedessen bloss $n-1$ mal durch jeden der vier Grundpunkte, hat also insofern mit dem Kreis λ zunächst $4(n-1)$ Schnittpunkte. Der Kreis λ wird ausserdem von der Originalkurve in 2n Punkten geschnitten; jedem derselben entsprechen auf dem gleichen Kreise zwei Punkte der Transformationskurve; dies ergibt 4n Schnittpunkte des Kreises λ mit der Transformationskurve. Insgesamt hat demnach der Kreis λ mit der Transformationskurve $4(n-1)+4n=8n-4$ Schnittpunkte d. h. die Transformationskurve ist von der Ordnung $4n-2$. Hieraus ist zu ersehen, dass jeder Durchgang der Originalkurve durch P die im allgemeinen als Ordnung der Transformationskurve festgestellte Zahl 4n um 2 vermindert, vorausgesetzt, dass die Originalkurve nicht auch durch einen Grundpunkt des Kreisbüschels geht.

Aus diesen Betrachtungen folgt an sich noch keineswegs, dass die angeführten Erniedrigungen auch dann noch dieselben bleiben, wenn die Originalkurve sowohl durch Grundpunkte des Kreisbüschels als auch durch P geht. Indessen selbst im allgemeinsten Falle, in dem die Originalkurve a mal durch Φ, b mal durch Φ', c mal durch jeden der unendlich fernen Kreispunkte, d mal durch P geht, kann mit Hilfe der im vorstehenden angewandten Methode und unter Benützung der Sätze, die über die Richtung der Transformationskurve in den Fundamentalpunkten bereits feststehen, leicht gezeigt werden, dass jede Gerade $\mathfrak{P}//$ mit der Transformationskurve $4n-a-b-2c-2d$ Punkte gemein hat; dann gilt also in völliger Allgemeinheit der Satz:

Einer Kurve von der Ordnung n entspricht eine Kurve von der Ordnung 4n; doch wird diese Zahl 4n für jeden Durchgang der Originalkurve durch einen Grundpunkt des Kreisbüschels um 1, für jeden Durchgang der Originalkurve durch P um 2 vermindert*)

*) Es wurde früher bereits darauf hingewiesen, dass die Transformationskurve immer durch diejenigen Punkte des Kreises π geht, durch welche auch die Originalkurve geht. Damit war nicht gesagt, dass sie auch nur durch solche Punkte des Kreises k_π geht. Dass sie aber auch thatsächlich noch durch andere Punkte des Kreises π gehen wird, ist nunmehr leicht einzusehen. Nämlich: dem Kreise π_∞, der durch drei Fundamentalpunkte, nämlich durch P und die beiden unendlichfernen Kreispunkte Ψ und Ψ' geht, entspricht im Systeme S eine Kurve 4. Ordnung, die einmal durch jeden Grundpunkt des Kreisbüschels, zweimal durch P geht. Da aber der Kreis π selbst dieser Kurve 4. Ordnung angehört, so zerfällt dieselbe in diesen Kreis π und einen Kegelschnitt, der

§ 4. Analytische Darstellung.

In den bisherigen Entwickelungen wurde zwar von den Begriffen, wie die analytische Geometrie sie darbietet, in ausgiebigem Masse Gebrauch gemacht, auf die Anwendung der analytischen Methode selbst wurde jedoch verzichtet, und in der Tat scheint zur Beantwortung der bisher aufgetretenen Fragen eine mehr synthetische Betrachtungsweise geeigneter zu sein. In Fragen jedoch, wie sie weiterhin aufzuwerfen sind, namentlich in solchen, die sich auf die Klasse der Transformationskurve beziehen, reicht die bloss synthetische Methode nicht aus, es soll deshalb für unsere Verwandtschaft eine analytische Darstellung gesucht werden.

Wir legen die Ordinatenaxe unseres rechtwinkeligen Koordinatensystems in die Radicalaxe des Kreisbüschels, die Abscissenaxe in die Centrale desselben und bezeichnen die Koordinaten eines dem Systeme S angehörigen Punktes A mit x|y, die Koordinaten eines dem Systeme $\mathfrak{S}$ angehörigen Punktes $\mathfrak{A}$ mit $\xi|\eta$, insbesondere die Koordinaten des Punktes P mit a|b, die des Punktes $\mathfrak{P}$ mit $\gamma|\delta$. Die beiden dem Punkte x|y entsprechenden liegen dann zunächst auf dem Kreise:

$\xi^2+\eta^2-2k\xi-e^2=0$, wo e eine Konstante ist und der Parameter k sich aus der Gleichung bestimmt:

$x^2+y^2-2kx-e^2=0.$

Aus letzterer Gleichung folgt sofort:

$$k=\frac{x^2+y^2-e^2}{2x}.$$

Die Richtungstangente m der Geraden PA bestimmt sich aus der Gleichung:

$$m=\frac{y-b}{x-a};$$

dieser Geraden PA entspricht im Systeme $\mathfrak{S}$ eine Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{A}$ mit der Gleichung:

$$\eta-\delta=p(\xi-\gamma);$$

hiebei ist: $p=\frac{m+q}{1-mq}$; worin die Konstante q die trig. Tangente des Peripheriewinkels ist, der im Kreise π über dem Bogen $P\mathfrak{P}$ steht.

Die zwischen einem Punkte x|y und den beiden ihm entsprechenden $\xi|\eta$ bestehende Beziehung wird demnach vermittelt durch die Gleichungen:

$\xi^2+\eta^2-2k\xi-e^2=0;$

---

durch Φ, Φ' und P geht. Einem jeden Durchgang der Originalkurve durch diesen Kegelschnitt entspricht nun auch ein Durchgang der Transformationskurve durch denKreis π. — Dieser Kegelschnitt ist eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem der Kreis π von der Radicalaxe des Kreisbüschels in zwei reell getrennten, zwei zusammenfallenden oder zwei konjugiert imaginären Punkten geschnitten wird.

$$\eta - \delta = p(\xi - \gamma);$$

$$k = \frac{x^2 + y^2 - e^2}{2x};$$

$$p = \frac{m+q}{1-mq};$$

$$m = \frac{y-b}{x-a}.$$

Aus der ersten Gleichung lässt sich noch η eliminieren: unsere (1,2) Korrespondenz wird dann analytisch dargestellt durch die beiden Gleichungen:

$$\xi^2(1+p^2) - 2\xi(k + \gamma p^2 - \delta p) \quad e^2 - (\delta - \gamma p)^2;$$
$$\eta = \delta + p(\xi - \gamma).$$

Diese Gleichungen können leicht zu einer analytischen Herleitung der bisher erhaltenen Resultate benützt werden; im folgenden sollen sie jedoch bloss zur Beantwortung solcher Fragen dienlich sein, die sich vermittelst einer die Rechnung ausschliessenden Betrachtungsweise nur sehr schwer oder auch gar nicht würden beantworten lassen.

Wir sehen zu, in welcher Weise die Richtung, welche die Transformationskurve in einem ihrer Punkte besitzt, von der Originalkurve abhängt. Gehen wir vom Punkte x y zum folgenden x + dx y + dy über, so genügen die Zuwachse $d\xi$ $d\eta$ den beiden Gleichungen:

1) $2\xi d\xi(1+p^2) + 2p\xi^2 dp - 2d\xi(k + \gamma p^2 - \delta p) - 2\xi(dk + 2\gamma p\, dp - \delta\, dp) = 2(\delta - \gamma p)\gamma\, dp;$

2) $\frac{d\eta}{d\xi} = p + (\xi - \gamma)\frac{dp}{d\xi}.$

Die erste Gleichung geordnet:

$$d\xi[\xi(1+p^2) - k - \gamma p^2 + \delta p] = \xi dk + dp[\delta(\gamma - \xi) - p(\xi - \gamma^2)]$$
$$= \xi\, dk - dp.\eta(\xi - \gamma).$$

Doch ist hiebei vorausgesetzt, die Zuwachse dx und dy seien nicht derart, dass die Gleichung identisch erfüllt ist.*)

Aus der ersten Gleichung folgt sofort:

$$\frac{d\xi}{dp} = \frac{\xi\frac{dk}{dp} - (\eta - \xi\gamma)}{\xi(1+p^2) - k - \gamma p^2 + \delta p};$$

*) Damit die Gleichung identisch erfüllt sei, muss gleichzeitig den beiden Bedingungen genügt sein:

1) $\xi(1+p^2) - k - \gamma p^2 + \delta p = 0.$
2) $\xi dk - \eta dp(\xi - \gamma) = 0.$

Die erste dieser Gleichungen sagt aus, dass der der Originalkurve angehörende Punkt x|y auf einer gewissen ausgezeichneten Kurve liegt, deren Gleichung eben die obige ist; die zweite Gleichung sagt aus, dass die Originalkurve im Punkt x|y eine gewisse ausgezeichnete Richtung hat, wie sich später zeigen wird, die Richtung der durch die erste Gleichung dargestellten Kurve.

setzt man dies ein in die zweite Gleichung, so ergibt sich:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = p + \frac{(\xi-\gamma)[\xi(1+p^2)-k-\gamma p^2+\delta p]}{\xi\frac{dk}{dp}-\eta(\xi-\gamma)}$$

Es ist aber:

$$dk = \frac{dx[x^2-y^2+e^2]+2xy\,dy}{2x^2};$$

$$dp = \frac{(1+q^2)[dy(x-a)-dx(y-b)}{[x-a-q(y-b)]^2}$$

Alles eingesetzt und geordnet:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = p + \frac{(\xi-\gamma)[\xi(1+p^2)-k-\gamma p^2+\delta p]}{\xi\,\frac{x-qy-a+bq^2}{2x^2(1+q^2)}\cdot\frac{x^2-y^2+e^2+2xy\frac{dy}{dx}}{(x-a)\left[\frac{dy}{dx}-\frac{y-b}{x-a}\right]}-\eta(\xi-\gamma)}$$

Dies ist der Zusammenhang, wie er unter der oben gemachten Voraussetzung zwischen der Originalkurve und der Grösse $\frac{d\eta}{d\xi}$ besteht. — Wir betrachten hier nur den Fall, dass PII im Punkte xy Tangente an die Originalkurve sei. Dann ist: $\frac{dy}{dx} = \frac{y-b}{x-a}$; und man erhält: $\frac{d\eta}{d\xi} = p$.

Wie man sieht, ergibt sich jedoch diese zuletzt erhaltene Gleichung nicht oder wenigstens nicht ohne weiteres in gewissen Fällen, in denen der oben für $\frac{d\eta}{d\xi}$ erhaltene Ausdruck zunächst unbestimmt wird: schliessen wir diese Fälle als bereits sehr spezielle von der Betrachtung aus, so ist die zuletzt erhaltene Gleichung richtig und liefert uns sofort den Satz:

So oft die Originalkurve in einem ihrer Punkte A von einer PII berührt wird, so oft wird die Transformationskurve sowohl in $\mathfrak{N}$ als in $\mathfrak{N}'$ von der entsprechenden $\mathfrak{P}II$ berührt. — Dieser Satz wird später benützt werden.

§ 5. Klassenzahl.

Die Ordnung der Transformationskurve wurde abhängig gefunden bloss von der Ordnung der Originalkurve und der Zahl der Durchgänge, welche die Originalkurve durch die Fundamentalpunkte hat. Die verhältnismässige Einfachheit und Allgemeinheit des dabei hervorgetretenen Zusammenhanges ist darauf zurückzuführen, dass die Transformation eine Punkttransformation ist: in Bezug auf die Klassenzahl der Transformationskurve wird sich also weder ein in gleicher Weise einfaches noch ein in gleicher Weise alle Fälle umfassendes Gesetz aufstellen lassen: immerhin soll im folgenden die Bestimmung der Klassenzahl

wenigstens für die allgemeinsten Fälle versucht werden.*) Zu diesem Zwecke zählen wir die Tangenten, die von $\mathfrak{P}$ an die Transformationskurve gehen. Von diesen Tangenten wird eine Anzahl in $\mathfrak{P}$ selbst berühren, bei einer weiteren Anzahl werden die Berührpunkte von $\mathfrak{P}$ verschieden sein. Die Tangenten, die in $\mathfrak{P}$ selbst berühren, lassen wir vorläufig ausser Betracht, da ihre Anzahl leicht aus der Anzahl der Durchgänge zu bestimmen ist, welche die Transformationskurve in $\mathfrak{P}$ hat; um zu erkennen, wie viele Tangenten von $\mathfrak{P}$ an die Transformationskurve gehen, deren Berührpunkte nicht auf $\mathfrak{P}$ selbst liegen, hat man vor allem die Frage zu beantworten, wie derartige Tangenten überhaupt zustande kommen. — Irgend eine $\mathfrak{P}II$ kann dann und nur dann eine solche Tangente sein, wenn zwei auf dieser Geraden gelegene Punkte der Transformationskurve unmittelbar aufeinander folgende sind. Irgend zwei auf irgend einer $\mathfrak{P}II$ gelegene Punkte der Transformationskurve werden aber entweder von zwei verschiedenen Kreisen des Büschels (dann bezeichnen wir den einen der Punkte mit $\mathfrak{A}$, den andern mit $\mathfrak{B}$ oder auch vom selben Kreis (dann bezeichnen wir den einen der Punkte mit $\mathfrak{A}$, den andern mit $\mathfrak{A}'$) ausgeschnitten; unmittelbar aufeinander folgend werden sie im ersteren Falle dadurch, dass die zwei sie ausschneidenden Kreise $\Phi\Phi'$A und $\Phi\Phi'$B unmittelbar aufeinanderfolgen, im zweiten Falle dadurch, dass der eine sie ausschneidende Kreis $\Phi\Phi'$A die Gerade $\mathfrak{P}II$ eben in zwei aufeinander folgenden Punkten schneidet.

Im ersteren Falle sollen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf derselben $\mathfrak{P}II$ liegen; dazu ist erforderlich und hinreichend, dass A und B auf derselben PII liegen. Es sollen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von zwei aufeinanderfolgenden Kreisen ausgeschnitten werden; dazu ist erforderlich und hinreichend, dass A und B aufeinanderfolgende Punkte der Originalkurve sind. Es ist klar, dass in diesem Falle auch $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ aufeinanderfolgen; man kann daher sagen: So oft eine PII mit der Originalkurve in einem Punkte M zwei aufeinanderfolgende Punkte gemein hat, so oft hat auch die entsprechende $\mathfrak{P}II$ in jedem der Punkte $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ mit der Transformationskurve zwei aufeinanderfolgende Punkte gemein. — Wenn jedoch irgend eine Gerade in einem ihrer Punkte mit einer Kurve zwei aufeinanderfolgende Punkte gemein hat, so ist entweder die Gerade in dem betreffenden Punkte Tangente der Kurve oder aber die Kurve hat in diesem Punkt eine Spitze. Für unseren Zweck ist es nun notwendig zu ermitteln, unter welchen Bedingungen

*) Es sei für die ganze Folge vorausgesetzt, dass die Originalkurve von keiner der vier Geraden g berührt wird und dass unter den Berührpunkten der Tangenten, die von P an die Originalkurve gehen, keiner ein Punkt des Kreises $k_\mathfrak{P}$ ist. Diese Fälle sollen von der Betrachtung ausgeschlossen sein, weil sie ebenso wie die bereits in § 5 ausgeschlossenen schon von sehr spezieller Natur sind und eigentlich neue Schwierigkeiten bei ihnen nicht hinzutreten.

diese beiden in $\mathfrak{A}$ bezw. $\mathfrak{A}'$ aufeinanderfolgenden Punkte der Transformationskurve derart aufeinanderfolgen, dass sie eine Spitze, und unter welchen Bedingungen derart, dass sie eine durch $\mathfrak{P}$ gehende Tangente zustande bringen. Wie auf analytischem Wege gezeigt wurde, bringen sie bei ihrem Aufeinanderfolgen eine durch $\mathfrak{P}$ gehende Tangente der Transformationskurve immer dann zustande, wenn auf der Originalkurve die Punkte A und B selbst längs einer durch P gehenden Tangente aufeinanderfolgen: und man findet leicht, dass sie auch nur unter dieser Bedingung eine durch $\mathfrak{P}$ gehende Tangente der Transformationskurve zustande bringen, indem einer Spitze der Originalkurve notwendig ein Paar von Spitzen der Transformationskurve entspricht. Aus der für $\begin{smallmatrix}\delta\gamma\\ \delta\xi\end{smallmatrix}$ gegebenen Darstellung geht nämlich ohne weiteres hervor, dass einem eigentlichen Doppelpunkt der Originalkurve ein Paar von eigentlichen Doppelpunkten der Transformationskurve entspricht, und dass dieses Paar von eigentlichen Doppelpunkten sofort in ein Paar von Spitzen übergeht, wenn der eigentliche Doppelpunkt der Originalkurve selbst in eine Spitze übergeht. — Durch diese Betrachtungen ist demnach genau bestimmt, wie oft zwei Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch ihr Zusammenrücken eine durch $\mathfrak{P}$ gehende Tangente zustande bringen.*)

Im zweiten Falle ist leicht zu ersehen, dass nicht an jeden auf $\mathfrak{P}II$ gelegenen Punkt $\mathfrak{A}$ sein zugeordneter $\mathfrak{A}'$ heranrücken kann, da allgemein irgend eine Gerade nur von zwei Kegelschnitten eines Büschels berührt wird. Es wird aber auf jeder $\mathfrak{P}II$ Punkte geben, für welche dies eintritt; die sämtlichen Punkte des Systemes $\mathfrak{S}$, in denen die Verbindungsgerade mit $\mathfrak{P}$ von einem Kreis des Büschels berührt wird, werden einen Ort erfüllen: es ist nicht schwer, dessen Gleichung aufzustellen.

Die Gleichung des Kreisbüschels sei:

$$\xi^2+\eta^2-2k\xi-e^2=0;\ \text{wo k der Parameter.}$$

Die Koordinaten von $\mathfrak{P}$ seien $\xi=\gamma$ und $\eta=\delta$; dann ist die Gleichung der zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Polaren:

$$\gamma\xi+\delta\eta-k(\xi+\gamma)-e^2=0.$$

* Ueberlegungen, analog den vorstehenden, führen noch zu dem allgemeineren Satze: Wenn irgend eine P II in einem ihrer Punkte A mit der Originalkurve eine Berührung von beliebig hoher Ordnung hat, so hat die entsprechende $\mathfrak{P}$ II sowohl in $\mathfrak{A}$ als in $\mathfrak{A}'$ mit der Transformationskurve eine Berührung von mindestens derselben Ordnung. — Auf die Kreise des Büschels lassen sich aber die gleichen Ueberlegungen wie auf die durch P gehenden Geraden anwenden; es gilt daher auch der gleiche Satz: Wenn irgend ein Kreis des Büschels in einem seiner Punkte A mit der Originalkurve eine Berührung von beliebig hoher Ordnung hat, so hat er auch mit der Transformationskurve sowohl in $\mathfrak{A}$ als in $\mathfrak{A}'$ eine Berührung von mindestens derselben Ordnung. Letzterer Satz gilt insbesondere auch im Falle einfacher Berührung; da aber jede Originalkurve von einem oder dem anderen Kreis des Büschels berührt wird, so werden auch alle durch unsere Transformation zu erhaltenden Kurven die Eigenschaft haben, dass sie von einem oder dem anderen Kreise des Büschels doppelt berührt werden.

Die beiden Gleichungen als zugleich bestehend aufgefasst stellen dar die Berührpunkte der von $\mathfrak{P}$ an den Kreis k gehenden Tangenten; durch Elimination von k erhält man demnach die Gleichung des Ortes der Berührpunkte:

$$\xi^3+\xi\eta^2-\gamma\xi^2+\gamma\eta^2-2\delta\xi\eta+e^2\xi-\gamma e^2=0.$$

Diese Kurve 3. Ordnung soll in der Folge als Tangentialkurve des Systemes $\mathfrak{S}$ bezeichnet werden: ihre Eigenschaften kann man aus der Gleichung leicht diskutieren: ausser ihrer Ordnungszahl braucht man jedoch von ihren Eigenschaften bloss folgende zu kennen: Sie hat keinen Doppelpunkt, geht einmal durch jeden der vier Grundpunkte des Kreisbüschels, einmal durch $\mathfrak{P}$; in $\mathfrak{P}$ wird sie berührt von derselben Tangente wie der Kreis $k_{\mathfrak{P}}$, während ihre vier übrigen von $\mathfrak{P}$ ausgehenden Tangenten in den Grundpunkten des Kreisbüschels berühren.

Dort nun und nur dort, wo die Transformationskurve von dieser Tangentialkurve geschnitten wird, können die Berührpunkte derjenigen von $\mathfrak{P}$ ausgehenden Tangenten liegen, welche durch das Zusammenrücken zweier demselben Punkte A entsprechenden Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ zustande kommen. Als Berührpunkte derartiger Tangenten kommen jedoch nicht in Betracht diejenigen Schnittpunkte von Transformationskurve und Tangentialkurve, die infolge des Hindurchgehens der Transformationskurve durch die Fundamentalpunkte entstehen, wohl aber alle übrigen Schnittpunkte, auch dann noch, wenn von diesen irgend welche an Fundamentalpunkte unendlich nahe herangerückt sind.

Gegen das Vorstehende erhebt sich indessen eine Schwierigkeit. Wenn nämlich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ zusammenrücken, so kann dies in der Weise erfolgen, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ für irgend eine von der $\mathfrak{P}II$ angenommene Lage $\mathfrak{P}II_1$ zunächst reell getrennt sind, dann bei Drehung der $\mathfrak{P}II$ sich mehr und mehr nähern und für eine Lage $\mathfrak{P}II_2$ in einem auf $\mathfrak{P}II_2$ gelegenen Punkt U zusammenfallen, bei weiterer Drehung der $\mathfrak{P}II$ aber konjugiert imaginär werden, dass also $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ von reell getrennten Lagen durch das Zusammenfallen hindurch ins Imaginäre übertreten, oder umgekehrt. Durchläuft in diesem Fall ein veränderlicher Punkt $\mathfrak{Z}$ die Transformationskurve, so geht derselbe im Punkte U zweimal durch die Gerade $\mathfrak{P}U$ hindurch und zwar für Lagen, die unmittelbar aufeinander folgen: es ist demnach U entweder Berührpunkt einer von $\mathfrak{P}$ ausgehenden Tangente oder Spitze der Transformationskurve. Es können jedoch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ nach ihrem in U erfolgten Zusammenrücken auch reell bleiben, wie sie vorher reell waren, und imaginär bleiben, so wie sie vorher imaginär waren. Durchläuft in diesem zweiten Falle der veränderliche Punkt $\mathfrak{Z}$ die Transformationskurve, so geht derselbe im Punkte U gleichfalls zweimal durch die Gerade $\mathfrak{P}U$ hindurch, aber für Lagen, die nicht mehr unmittelbar aufeinander folgen: U ist dann

ein eigentlicher Doppelpunkt der Transformationskurve.*) Letzteres tritt thatsächlich immer dann ein, wenn die Transformationskurve zerfällt.**) Wird nämlich eine Kurve C transformiert in eine Kurve $\mathfrak{C}$, so kann $\mathfrak{C}$ nicht in zwei Kurven $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ zerfallen, ohne dass von den zwei Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, die einem beliebigen der Kurve C angehörigen Punkt A entsprechen, der eine $\mathfrak{A}$ der Teilkurve $\mathfrak{C}_1$, der andere $\mathfrak{A}'$ der Teilkurve $\mathfrak{C}_2$ angehört. Denn würden irgend einem Punkte A, welcher der C angehört, zwei derselben Teilkurve $\mathfrak{C}_1$ angehörende Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ entsprechen, so würden auch die dem benachbarten Punkte B entsprechenden beiden Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ der Teilkurve $\mathfrak{C}_1$ angehören u. s. f.: es würden überhaupt alle Punkte, die Punkten der C entsprechen, der Teilkurve $\mathfrak{C}_1$ angehören. Dies gilt nicht bloss für unicursale C, sondern auch für solche C, die aus mehreren Zügen bestehen. Wenn also eine derartige Transformationskurve $\mathfrak{C}$ in zwei Teilkurven $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ zerfällt, so stehen diese beiden Teilkurven unter sich und mit der Originalkurve in (1,1) – Korrespondenz: $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ können dann niemals aus dem Reellen durch das Zusammenfallen hindurch zu konjugiert imaginären Lagen übergehen, weil der eine dieser beiden konjugiert imaginären Punkte der Teilkurve $\mathfrak{C}_1$, der andere der Teilkurve $\mathfrak{C}_2$ angehören müsste, einer reellen Kurve aber, der ein imaginärer Punkt angehört, zugleich auch der konjugiert imaginäre angehören muss. — Wenn jedoch die Transformationskurve nicht zerfällt, die zugeordneten Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ demnach derselben Kurve angehören, so geben die bisherigen Entwickelungen keinen Anhaltspunkt, um zu bestimmen, ob $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, falls sie irgend einmal zusammenrücken, hiebei aus dem Reellen ins Imaginäre

* Damit alle Möglichkeiten erschöpft seien, muss bemerkt werden, dass im Falle $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ aus reell getrennten Lagen durch das Zusammenfallen in $\mathfrak{U}$ hindurch in reell getrennte Lagen übergehen, der Punkt $\mathfrak{U}$ nicht gerade ein eigentlicher Doppelpunkt sein muss, er könnte vielmehr auch Selbstberührpunkt sein. Indessen für den hier in Betracht kommenden Zweck, die Anzahl der von $\mathfrak{P}$ an die Transformationskurve gehenden Tangenten zu bestimmen, kann immerhin der Selbstberührpunkt unter den eigentlichen Doppelpunkt subsumiert werden. Nämlich: die Tangente eines Selbstberührpunktes $\mathfrak{U}$ geht entweder durch den Punkt $\mathfrak{P}$ oder sie geht nicht durch den Punkt $\mathfrak{P}$. Geht sie durch den Punkt $\mathfrak{P}$, so gehen auch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ aus dem Reellen durch das Zusammenfallen in $\mathfrak{U}$ hindurch ins Imaginäre über, es geht nur gleichzeitig noch ein anderes Paar von Punkten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ durch das Zusammenfallen in $\mathfrak{U}$ hindurch ins Imaginäre über: ein Selbstberührpunkt $\mathfrak{U}$, dessen Tangente durch $\mathfrak{P}$ geht, ist demnach gar nicht von der Entstehungsweise, die hier allein in Betracht kommt. Geht aber die Tangente des Selbstberührpunktes $\mathfrak{U}$ nicht durch den Punkt $\mathfrak{P}$, so hat für die augenblickliche Frage der Selbstberührpunkt $\mathfrak{U}$ bloss die Bedeutung, dass in ihm keine von $\mathfrak{P}$ ausgehende Tangente der Transformationskurve ihren Berührpunkt hat, dass er also die Zahl derjenigen Schnittpunkte von Tangentialkurve und Transformationskurve, in denen eine von $\mathfrak{P}$ ausgehende Tangente berühren könnte, um 2 vermindert. Diese Bedeutung kommt jedoch dem einfachen Doppelpunkte gleichfalls zu

**) Also insbesondere auch bei Rücktransformation.

treten oder nicht. Dies wird man jedoch sehr leicht entscheiden können, sobald man weiss, welche (reellen) Punkte des Systemes S sich überhaupt reell transformieren. Man übersieht sofort, dass diese Frage ganz allgemein bei jeder zwei-zweideutigen Verwandtschaft gestellt werden kann; und da ihre analytische Behandlung für die allgemeine zwei-zweideutige Verwandtschaft bei Ausschluss von Rücktransformation sich nicht wesentlich weitläufiger gestaltet als für unsere besondere, so mag die ganze Betrachtung sogleich für die allgemeine zwei-zweideutige Verwandtschaft angestellt werden.

Seien x y die Koordinaten eines Punktes im Systeme S, ξ η die Koordination eines Punktes im Systeme $\mathfrak{S}$: zwischen beiden Systemen bestehe (2 2) Korrespondenz. Dieselbe wird vermittelt durch die beiden Gleichungen:

1) $A\xi^2+B\eta^2+C\xi\eta+D\xi+E\eta+F=0;$
2) $G\xi+H\eta+I=0;$

wobei die Koeffizienten Funktionen der x, y sind, in einer Gleichung linear, in der anderen quadratisch, im übrigen noch verschieden je nach der Art der gerade vorliegenden Verwandtschaft. Beide Gleichungen können durch Elimination immer auf die Form gebracht werden:

1) $\xi^2-2A\xi=B;$
2) $\eta=C\xi+D;$

wobei die neuen Koefficienten sich aus den alten zusammensetzen in einer Weise, auf die es hier durchaus nicht ankommt.

Durch Ausziehen der Wurzel geht die erste Gleichung über in:

$$\xi=A\pm\sqrt{B+A^2}.$$

Hieraus ersieht man, dass die beiden Wertepaare von ξ η in eines zusammenfallen bloss für ein solches Wertepaar von x y, für welches die Discriminante $B+A^2$ verschwindet. Ferner sind ξ und η reell, sobald $B+A^2$ positiv, und imaginär, sobald $B+A^2$ negativ ist. Geometrisch gesprochen ist $B+A^2=0$ als eine Beziehung zwischen x und y die Gleichung einer Kurve; diese Kurve trennt das System S in zwei Bereiche; jedem Punkt desjenigen Bereiches, für welchen $B+A^2$ positiv ist, entspricht ein Paar reeller Punkte, jedem Punkt des anderen Bereiches entspricht ein Paar konjugiert imaginärer Punkte*) Sofern die Kurve $B+A^2=0$ diejenigen reellen Punkte, die sich reell transformieren, sondert von denjenigen, die sich imaginär transformieren, möge sie als Sonderungskurve des Systemes S bezeichnet werden. Ihr entspricht im Systeme $\mathfrak{S}$ der Ort der Punkte, in

*) Es kann noch darauf hingewiesen werden, dass die reellen Punkte des Systemes $\mathfrak{S}$ doch nur zum Teil reellen Punkten des Systemes S entsprechen, nämlich nur soweit sie im Aeusseren der zum Systeme $\mathfrak{S}$ gehörigen Sonderungskurve liegen. Die reellen Punkte von $\mathfrak{S}$, die im Innern dieser Sonderungskurve liegen, sind solche, die imaginären Punkten von S entsprechen.

denen zwei zugeordnete Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ zusammenfallen. Es ist nun analytisch sehr leicht nachzuweisen, geometrisch aber ohne weiteres klar, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ durch das Zusammenfallen aus dem Reellen ins Imaginäre treten, sobald A aus dem Bereich, der sich reell transformiert, übertritt in den Bereich, der sich imaginär transformiert, dass jedoch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ beide reell bezw. imaginär bleiben, so lange A im gleichen Bereich verbleibt. Es gilt so für jede zwei-zweideutige Verwandtschaft der Satz:

Hat die Originalkurve in einem Punkte M mit der Sonderungskurve i aufeinanderfolgende Punkte gemein, so rücken $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{M}$ derart zusammen, dass sie aus dem Reellen ins Imaginäre treten, wenn i eine ungerade Zahl ist, dass sie aber reell bezw. imaginär bleiben, wenn i eine gerade Zahl ist.

Bei unserer besonderen Verwandtschaft ist die Sonderungskurve des Systemes S diejenige Kurve, welche der Tangentialkurve des Systemes $\mathfrak{S}$ entspricht Sie ist also von der 6. Ordnung, geht zweimal durch jeden Grundpunkt des Kreisbüschels, zweimal durch $\mathfrak{P}$. Ihre Gleichung ist:

$$B + A^2 = 0;$$

wo nach der analytischen Darstellung unserer Transformation:

$$A \quad \frac{k + \gamma p^2 - \delta p}{1 + p^2};$$

$$B \quad \frac{e^2 - (\delta - \gamma p)^2}{1 + p^2} \; *)$$

Nachdem so die Bedeutung der Sonderungskurve auseinandergesetzt ist, beschränken wir die Betrachtung auf solche Originalkurven, welche die Sonderungskurve des Systemes S einfach schneiden, niemals berühren. Bei derartigen Originalkurven rücken $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ immer so zusammen, dass sie hiebei aus dem Reellen ins Imaginäre treten: nach dem früheren ist dann der Punkt, in dem sie zusammenrücken, entweder Spitze der Kurve oder Berührpunkt einer von $\mathfrak{P}$ ausgehenden Tangente. Nun war gefunden:

*) An die vorstehenden Entwickelungen knüpft sich noch eine merkwürdige Eigenschaft unserer Transformation. — Es gehe die Originalkurve durch einen Punkt M, der auf der Tangentialkurve des Systemes S liegt, und besitze in diesem Punkt eine Tangente, die nicht gerade durch P geht. Die Kurve, welche der Originalkurve im selben Systeme zugeordnet ist (cf. § 1) geht dann gleichfalls durch M, die gesamte der Transformationskurve in der zwei-zweideutigen Beziehung entsprechende Kurve hat also in M einen Doppelpunkt. Damit aber letzteres der Fall sei, wird erfordert, dass die Transformationskurve in $\mathfrak{M}$, sowie in $\mathfrak{M}'$ die Sonderungskurve des Systemes $\mathfrak{S}$ nicht einfach schneidet, sondern sogar berührt. Man gelangt so zu dem Satze: Geht die Originalkurve durch einen Punkt M, der zugleich der Tangentialkurve des Systemes S angehört, so geht die Transformationskurve durch die entsprechenden auf der Sonderungskurve von $\mathfrak{S}$ gelegenen Punkte $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$, und zwar hat sie in diesen Punkten die gleiche Tangente wie die Sonderungskurve; in derartigen Punkten $\mathfrak{M}$ ist demnach die Richtung der Transformationskurve ausschliesslich abhängig von

$$\frac{d\eta}{d\xi} = p + \frac{Z}{N};$$

wo: $Z = (\xi - \gamma)[\xi(1+p^2) - k\ \ \gamma p^2 + \delta p];$

$$N = \frac{\xi(x - qy - a + bq)^2}{2x^2(1+q^2)} \cdot \frac{x^2 - y^2 + e^2 + 2xy\frac{dy}{dx}}{(x-a)\left(\frac{dy}{dx} - \frac{y-b}{x-a}\right)} - \gamma(\xi - \gamma).$$

Da x|y auf der Sonderungskurve liegt, so ist: $Z = 0$. Der Zähler des Bruches $\frac{Z}{N}$ ist also Null. Da die Originalkurve in xy nicht dieselbe Tangente hat wie die Sonderungskurve, so ist N von Null verschieden; dann ist also:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = p;$$

d. h. der dem Punkte xy entsprechende ist thatsächlich Berührpunkt einer von $\mathfrak{P}$ ausgehenden Tangente der Transformationskurve.

Vermittelst der bisher angestellten Überlegungen sind wir nunmehr imstande, das Gesetz zu entwickeln, nach dem unter den getroffenen Beschränkungen die Klassenzahl der Transformationskurve von der Originalkurve abhängt.

Bezeichnen wir die Zahl der in $\mathfrak{P}$ selbst berührenden Tangenten mit α, die Zahl der von $\mathfrak{P}$ ausgehenden Doppeltangenten, die infolge der von P an die Originalkurve gehenden einfachen Tangenten zustande kommen, mit β, die Zahl der von $\mathfrak{P}$ weiterhin ausgehenden einfachen Tangenten, die durch das Zusammenrücken zweier zugeordneten Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ entstehen, mit γ, so hat man für die Klassenzahl r' der Transformationskurve zu setzen:

$$r' = 2\alpha + 2\beta + \gamma.$$

Von der Originalkurve, deren Klassenzahl wir mit r bezeichnen, sei zunächst vorausgesetzt, sie gehe durch keinen der Fundamentalpunkte. Dann wird:

$$\alpha = 2n;$$
$$\beta = r;$$

um γ zu erhalten, bedenken wir folgendes:

Die Transformationskurve ist von der 4ten Ordnung, die Tangentialkurve von der 3. Ordnung, beide Kurven haben dem-

---

der Lage des Punktes M, in keiner Weise auch von der Richtung, in der die Originalkurve durch M geht, vorausgesetzt, dass die zu M gehörige Tangente der Originalkurve nicht gerade durch P geht. — Ist letzteres der Fall, so ist es durchaus nicht möglich, dass die Transformationskurve in $\mathfrak{M}$ die gleiche Richtung hat wie die Sonderungskurve; sie kann aber jede andere Richtung haben; ihre Richtung hängt dann also gar nicht ausschliesslich ab von der Lage des Punktes M und der Richtung der zu M gehörigen Tangente wie dies doch gewöhnlich der Fall ist, sondern noch von anderen Verhältnissen, auf die wir hier nicht weiter eingehen.

nach 12n Schnittpunkte. Von diesen kommen jedoch für die Zahl γ die in den Fundamentalpunkten gelegenen Schnittpunkte nicht in Betracht: auf jeden der vier Grundpunkte des Kreisbüschels entfallen n derartige Schnittpunkte, auf $\mathfrak{P}$ entfallen 2n Schnittpunkte; um γ zu erhalten, hat man also von der Gesamtzahl 12n der Schnittpunkte 4n + 2n abzuziehen: d. h. es ist:

$$\gamma = 12n - 6n = 6n.$$

Die Klassenzahl ν' der Transformationskurve wird dann bestimmt durch die Gleichung:

$$\nu' = 2\nu + 10n.$$

Die Klassenzahl lässt sich noch anders darstellen, indem man ν selbst ausdrückt durch n und die Anzahl d der eigentlichen Doppelpunkte, r der Spitzen der Originalkurve; es ist nämlich nach einer der Plücker'schen Formeln:

$$\nu = n(n-1) - 2d - 3r; \text{ demzufolge:}$$
$$\nu' = 2n(n-1) + 10n - 4d - 6r$$
$$= 2n(n+4) - 4d - 6r.$$

Geht nun die Originalkurve a mal durch Grundpunkte des Kreisbüschels, so vermindert sich für jeden derartigen Durchgang die Zahl α um 1, es wird daher $\alpha = 2n - a$; β bleibt unverändert; für jeden Durchgang der Originalkurve durch einen Grundpunkt des Kreisbüschels vermindert sich auch die Ordnung der Transformationskurve um 1, bei a solchen Durchgängen wird daher die Zahl der Schnittpunkte von Transformationskurve und Tangentialkurve: 3(4n − a); um hieraus γ zu erhalten, sind noch die auf die Fundamentalpunkte entfallenden Schnittpunkte in Abzug zu bringen; es entfallen aber auf jeden Grundpunkt des Kreisbüschels n, auf $\mathfrak{P}$ 2n − a derartige Schnittpunkte; daher wird:

$$\gamma = 3(4n - a) - 4n - (2n - a)$$
$$= 6n - 2a; \text{ folglich:}$$
$$\nu' = 4n - 2a + 2\nu + 6n - 2a$$
$$= 2\nu + 10n - 4a.$$

Die Originalkurve gehe noch b mal durch P. Dann bleibt α ungeändert; die Anzahl β der von P an die Originalkurve gehenden Tangenten, die nicht in P selbst berühren, ist jedoch nicht mehr die Klassenzahl ν selbst, sondern die für jeden durch P erfolgenden Durchgang der Originalkurve um 2 verminderte Zahl ν d. h. es ist: $\beta = \nu - 2b$. Die Ordnungszahl der Transformationskurve ist nunmehr: 4n − a − 2b; die Transformationskurve hat also mit der Tangentialkurve nur mehr 3(4n − a − 2b) Schnittpunkte; von diesen Schnittpunkten entfallen n − b auf jeden der vier Grundpunkte des Kreisbüschels, 2n − a auf $\mathfrak{P}$; es ist daher:

$$\gamma = 3(4n - a - 2b) - 4(n - b) - (2n - a)$$
$$6n - 2a - 2b.$$

Dann wird aber:

$$\nu' = 4n - 2a + 2\nu - 4b + 6n - 2a - 2b$$
$$= 2\nu + 10n - 4a - 6b.$$

Unsere Betrachtungen führen so zu dem Satze:

Die Klassenzahl der Transformationskurve ist im allgemeinen $2r + 10n$; doch wird diese Zahl für jeden Durchgang der Originalkurve durch einen der vier Grundpunkte des Kreisbüschels um 4, für jeden Durchgang der Originalkurve durch P um 6 vermindert.

§ 6. Geschlecht

Es soll nunmehr die Transformationskurve bezüglich ihres Geschlechtes untersucht werden. Das Geschlecht einer Kurve bestimmt sich aus ihrer Ordnung und der Zahl ihrer Doppelpunkte, ohne Rücksicht darauf, wie viele derselben eigentliche Doppelpunkte, wie viele Spitzen sind. Die Ordnung der Transformationskurve ist bekannt; es erübrigt nur noch die Gesamtzahl der Doppelpunkte zu bestimmen. Soweit die Doppelpunkte der Transformationskurve in den Fundamentalpunkten liegen, ist ihre Zahl auch bekannt, und es ist auch bereits gezeigt, dass einem Doppelpunkt A der Originalkurve ein Paar von Doppelpunkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ der Transformationskurve entspricht; es fragt sich nur, ob unter Umständen noch weitere Doppelpunkte der Transformationskurve zustande kommen, und falls letztere Frage zu bejahen ist, wie dies geschieht.

Damit ein Punkt $\mathfrak{M}$ des Systemes $\mathfrak{S}$ Doppelpunkt der Transformationskurve sei, ist erforderlich, dass bei Transformation der auf der Originalkurve gelegenen Punkte A es zweimal eintritt, dass von den beiden Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ irgend einer durch $\mathfrak{M}$ hindurchgeht. Es entsteht jedoch nach dem früheren kein Doppelpunkt, wenn die beiden demselben A entsprechenden Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ durch $\mathfrak{M}$ hindurchgehen; ein Punkt $\mathfrak{M}$ des Systemes $\mathfrak{S}$ kann also nur dadurch Doppelpunkt der Transformationskurve werden, dass von den beiden einem bestimmten Punkte A der Originalkurve entsprechenden Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ einer durch $\mathfrak{M}$ geht und dass von den beiden einem anderen Punkte B der Originalkurve entsprechenden Punkten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ gleichfalls einer durch $\mathfrak{M}$ geht. Nun liegt ein solcher Doppelpunkt der Transformationskurve immer auf einer $\mathfrak{P}II$: die Punkte A und B der Originalkurve, deren entsprechende den Doppelpunkt zustande bringen, liegen demnach auf derselben PII. Andererseits wird ein derartiger Doppelpunkt der Transformationskurve immer ausgeschnitten von einem Kreise des Büschels: es müssen daher auch A und B von einem Kreis des Büschels ausgeschnitten werden. Dann ist aber nicht bloss $\mathfrak{M}$, sondern auch der zugeordnete $\mathfrak{M}'$ Doppelpunkt der Transformationskurve; und man kann sagen:

So oft zwei Punkte der Originalkurve sowohl vom selben Kreis des Büschels als von derselben durch P gehenden Geraden

ausgeschnitten werden, so oft entspricht diesem Paar von Punkten der Originalkurve ein Paar von Doppelpunkten der Transformationskurve.

Es fragt sich also, wie oft es eintritt, dass zwei Punkte der Originalkurve sowohl vom selben Kreis des Büschels als von derselben durch P gehenden Geraden ausgeschnitten werden. Unter der Voraussetzung, die Originalkurve gehe durch keinen Fundamentalpunkt, lässt sich diese Frage folgendermassen beantworten.

Ziehen wir durch P einen beliebigen Strahl P*II*, so wird derselbe von der gegebenen Kurve n^{ter} Ordnung in n Punkten: $A_1, A_2, \ldots A_n$ geschnitten; legen wir durch jeden dieser n Punkte den durch ihn hindurchgehenden Kreis des Büschels, so schneiden diese n Kreise auf P*II* ausser den Punkten A selbst die diesen Punkten A bezw. zugeordneten Punkte aus: $B_1, B_2, \ldots B_n$. Auf einem anderen Strahl P*II* wird man ebenfalls n solche B erhalten: lässt man den Strahl P*II* das ganze Strahlbüschel durchlaufen, so wird sich die Gesamtheit der Punkte B ergeben, die den Punkten A der gegebenen Kurve zugeordnet sind; die Gesamtheit dieser B wird eine Kurve erfüllen. Dieselbe hat in P einen Knotenpunkt: denn legt man durch P den Kreis $\Phi\Phi' P$, so hat dieser mit der Kurve (A) 2n Punkte A gemein: zu jedem dieser 2n Punkte A ist der zugeordnete desselben Systemes der Punkt P, d. h. P ist ein 2n facher Punkt der Kurve (B):*) jeder durch P gehende Strahl schneidet, wie bereits gefunden, die Kurve (B) in n weiteren Punkten; diese Kurve (B) ist daher von der Ordnung 3n. Die Kurven (A) und (B) haben also $3n^2$ Schnittpunkte. Wenn nun unter den n Punkten A_i die von der gegebenen Kurve auf irgend einem durch P gehenden Strahl P*II* ausgeschnitten werden, sich zwei Punkte A_i und A_k befinden sollen, die zugleich vom selben Kreis des Büschels ausgeschnitten werden, so muss B_i auf A_k und B_k auf A_i zu liegen kommen d. h. von den sämtlichen Punkten der Kurve (A) kommen bloss die $3n^2$ Schnittpunkte mit der Kurve (B) in Betracht als Punkte, die paarweise ein Paar von Doppelpunkten der Transformationskurve zustande bringen. Diese Bedingung, dass jeder für unseren Zweck in Betracht kommende Punkt Schnittpunkt der Kurven (A) und (B) sei, ist notwendig, aber nicht hinreichend.**) In der That sind

*) Es kann bemerkt werden, dass auch hier die Richtung, in welcher die Kurve (B) durch P hindurchgeht, ausschliesslich abhängt von der Lage der auf dem Kreise $\Phi\Phi' P$ befindlichen Punkte A, in keiner Weise auch von der Richtung, in der Kurve (A) durch solche Punkte des Kreises $\Phi\Phi' P$ hindurchgeht. — Es ist leicht zu übersehen, dass die Kurven (A) und (B) zusammen diejenige Kurve ausmachen, die in der (2,2) Korrespondenz der Kurve $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ als entsprechend gegenübersteht.

**) Es geht dies von vornherein schon daraus hervor, dass für ungerades n die Zahl $3n^2$ auch ungerade ist, Punkte von der verlangten Eigenschaft aber paarweise auf Strahlen PΠ liegen müssen.

unter diesen $3n^2$ Schnittpunkten auch diejenigen inbegriffen, in denen ein A_i mit seinem zugeordneten B_i zusammenliegt; in Fällen der letzteren Art aber wird nicht mehr A_i zugleich mit einem anderen A_k sowohl vom selben Kreis des Büschels als vom selben durch P gehenden Strahl ausgeschnitten. Dieser Fall, dass ein A_i mit seinem zugeordneten B_i zusammenliegt, tritt jedesmal dort und nur dort ein, wo die gegebene Kurve (A) von der Tangentialkurve des Systemes S geschnitten wird, im ganzen 3n mal. Die $3n^2$ 3n übrigen Schnittpunkte der Kurven (A) und (B) liegen jedoch immer paarweise auf Strahlen, die durch P gehen, und zwar so, dass jedesmal die beiden Punkte eines solchen Paares zugleich auch vom selben Kreis des Büschels ausgeschnitten werden. Es gibt daher $\frac{3n^2 - 3n}{2}$ derartige Punktpaare; jedem dieser Punktpaare entspricht ein Paar von Doppelpunkten; man erhält auf diese Weise $3n^2 - 3n$ Doppelpunkte der Transformationskurve, die paarweise auf Strahlen durch $\mathfrak{P}$ liegen.

Es soll nunmehr untersucht werden, ob und wie diese Zahl $3n^2 - 3n$ sich ändert, wenn die gegebene Kurve n^{er} Ordnung zwar immer noch nicht durch einen Grundpunkt des Kreisbüschels, hingegen a mal durch P geht. Auch in diesem Falle ist P ein Knotenpunkt der Kurve (B); denn der Kreis $\Phi\Phi' P$ wird von der gegebenen Kurve in 2n Punkten A geschnitten, von denen 2n—a Punkte nicht auf P selbst entfallen, wenn von diesen auch irgendwelche noch unendlich nahe an P heranrücken können, jedem dieser 2n—a Punkte ist zugeordnet der Punkt P d. h. P ist ein (2n—a)facher Punkt der Kurve (B). Irgend ein Strahl $P\Pi$ wird von der gegebenen Kurve ausser in P noch in n—a Punkten geschnitten, von denen irgendwelche auch unendlich nahe an P heranrücken können; jedem dieser n—a Punkte ist auf demselben Strahl $P\Pi$ ein Punkt B zugeordnet, den n—a Punkten A demnach n—a derartige Punkte B. Die zugeordneten der in P selbst liegenden Punkte befinden sich auf anderen Strahlen $P\Pi$. Der soeben betrachtete Strahl $P\Pi$ hat also mit der Kurve (B) 2n—a Schnittpunkte, die in P selbst liegen, ausserdem n—a weitere Schnittpunkte; man ersieht hieraus: Die Kurve (B) ist von der Ordnung 3n—2a.*) Die Kurven (A) und (B) haben demnach insgesamt n(3n—2a) Schnittpunkte. Von diesen entfallen a(2n—a) auf P selbst; von den übrigen n(3n—2a) —(2n—a) Punkten sind zu unserem Zwecke noch abzuziehen die nicht in P selbst liegenden Schnittpunkte der gegebenen Kurve n^{ter} Ordnung mit der Tangentialkurve des Systemes S. Die beiden letzteren Kurven haben zusammen 3n Schnittpunkte, von

*) Diese Kurve (B) hat in jedem Grundpunkt des Kreisbüschels einen (n—a)fachen Punkt; doch wird letztere Eigenschaft der Kurve (B) erst später zu beachten sein.

denen $3n-a$ nicht auf P selbst entfallen: von den Schnittpunkten der Kurven (A) und (B) sind es daher nur $n(3n-2a)-a(2n-a)-(3n-a)=3n^2-3n-4an+a^2+a$, die paarweise ein Paar von Doppelpunkten der Transformationskurve zustande bringen.

Die gegebene Kurve n^{ter} Ordnung gehe nunmehr noch bmal durch Φ, cmal durch Φ', dmal durch jeden der unendlich fernen Kreispunkte. Um die Ordnung der Kurve (B) zu bestimmen, zählen wir auch in diesem Falle die Schnittpunkte dieser Kurve mit dem Kreis $\Phi\Phi' P$. Dieser Kreis wird von der Kurve (A) ausser den Fundamentalpunkten in $2n-a-b-c-2d$ Punkten geschnitten, denen ebensoviele Punkte B zugeordnet sind, die jedoch nach P fallen. Es ist also P ein $(2n-a-b-c-2d)$facher Punkt der Kurve (B). Die Gerade $P\Phi$ wird ausser P und Φ von der Kurve (A) noch in $n-a-b$ Punkten geschnitten: jedem dieser Punkte ist der Punkt Φ zugeordnet; es ist demnach Φ ein $(n-a-b)$facher Punkt der Kurve (B). Ebenso ist Φ' ein $(n-a-c)$facher, jeder der unendlich fernen Kreispunkte ein $(n-a-d)$facher Punkt der Kurve (B). Der Kreis $\Phi\Phi' P$ wird jedoch von der Kurve (A) nicht bloss in Punkten geschnitten, die ausserhalb der Fundamentalpunkte liegen, sondern auch in den Fundamentalpunkten selbst. Soweit diese Schnittpunkte auf Grundpunkte des Kreisbüschels entfallen, besitzen sie keine zugeordneten, die auf dem Kreise $\Phi\Phi' P$ liegen: denn der zugeordnete eines Grundpunktes liegt auf der Verbindungsgeraden dieses Grundpunktes mit P, diese Verbindungsgerade hat aber mit dem Kreis $\Phi\Phi' P$ bloss den bezüglichen Grundpunkt und den Punkt P gemein, und insofern zugeordnete der Punkte A auf diese beiden Punkte zu liegen kommen, sind sie bereits in Rechnung gebracht. Wohl aber hat jeder in P gelegene Punkt der Originalkurve einen zugeordneten, der sich auf dem Kreise $\Phi\Phi' P$ befindet, und da P ein afacher Punkt der Originalkurve ist, so tritt es noch amal ein, dass der zugeordnete eines Punktes der Originalkurve auf den Kreis $\Phi\Phi' P$ zu liegen kommt. Damit sind aber auch alle Punkte der Kurve (B) aufgezählt, die auf dem Kreise $\Phi\Phi' P$ liegen; die Kurve (B) und der Kreis $\Phi\Phi' P$ haben also zur Gesamtzahl ihrer Schnittpunkte:

$$(2n-a-b-c-2d)+(n-a-b)+(n-a-c)+2(n-a-d)+a=$$
$$6n-4a-2b-2c-4d.$$

Die Kurve (B) ist daher von der Ordnung: $3n-2a-b-c-2d$. Dann besitzen aber die Kurven (A) und (B) insgesamt $n(3n-2a-b-c-2d)$ Schnittpunkte. Von diesen kommen für unseren Zweck überhaupt nicht in Betracht diejenigen Schnittpunkte, die auf Fundamentalpunkte entfallen: es entfallen aber $b(n-a-b)$ Schnittpunkte auf Φ, $c(n-a-c)$ auf Φ', $d(n-a-d)$ auf jeden der unendlich fernen Kreispunkte, $a(2n-a-b-c-2d)$ auf P. Von den übrigbleibenden Schnittpunkten sind noch ausser Betracht zu lassen diejenigen, die zugleich Schnittpunkte der Origi-

nalkurve mit der Tangentialkurve des Systemes S sind, soweit sie nicht gerade in den Fundamentalpunkten liegen. Die Originalkurve hat aber mit der Tangentialkurve des Systemes S insgesamt 3n Schnittpunkte, von denen $a+b+c+2d$ auf Fundamentalpunkte entfallen. — Als Zahl derjenigen auf der Originalkurve gelegenen Punkte, die paarweise ein Paar von Doppelpunkten der Transformationskurve zustande bringen, erhält man also: $n(3n-2a-b-c-2d)-b(n-a-b)-c(n-a-c)-2d(n-a-d)-a(2n-a-b-c-2d)-(3n-a-b-c-2d)=3n^2-3n-4an-2bn-2cn-4dn+a+b+c+2ab+2ac+4ad+a^2+b^2+c^2+2d^2$.

Nunmehr sind wir imstande, das Geschlecht der Transformationskurve in seiner Abhängigkeit von der Originalkurve zu bestimmen.

Bezeichnen wir bei der Transformationskurve die Zahl der Paare von Doppelpunkten, die einfachen Punktpaaren der Originalkurve entsprechen, mit α, die Zahl der in den Fundamentalpunkten gelegenen Doppelpunkte mit β, die Zahl derjenigen Paare von Doppelpunkten, die Doppelpunkten der Originalkurve entsprechen, mit γ, so gilt für die Gesamtzahl ω der Doppelpunkte, welche die Transformationskurve besitzt, die Gleichung:

$$\omega = 2\alpha+\beta+2\gamma.$$

Wir setzen nun zunächst voraus, die Originalkurve gehe durch keinen Fundamentalpunkt. Dann ist:

$$\alpha = \frac{3n^2-3n}{2};$$

$$\beta = 4\frac{n(n-1)}{2}+\frac{2n(2n-1)}{2} = 4n^2-3n.$$

Demnach: $\omega = 3n^2-3n+4n^2-3n+2\gamma = 7n^2-6n+2\gamma$.

Bezeichnen wir mit $\varkappa$ die Maximalzahl der Doppelpunkte, welche die Transformationskurve ihrer Ordnung zufolge überhaupt haben kann, ohne zu zerfallen, so hat man für das Geschlecht $\mathfrak{p}$ der Transformationskurve:

$$\mathfrak{p} = \varkappa - \omega.$$

Geht nun die Originalkurve durch keinen Fundamentalpunkt, so ist die Transformationskurve von der Ordnung 4n; dann folgt:

$$\varkappa = \frac{(4n-1)(4n-2)}{2} = 8n^2-6n+1;$$

alles eingesetzt:

$$\mathfrak{p} = 8n^2-6n+1-7n^2+6n-2\gamma$$
$$= n^2+1-2\gamma.$$

Beachtet man, dass das Geschlecht p der Originalkurve durch die Gleichung bestimmt wird:

$$2p = n^2-3n+2-2\gamma$$

so kann man schliesslich schreiben:

$$\mathfrak{p} = 2p+3n-1.$$

Die Originalkurve gehe nunmehr amal durch P, bmal durch Φ, cmal durch Φ', dmal durch jeden der unendlich fernen Kreispunkte. Dann ist vorerst zu bemerken, dass den in Fundamentalpunkten gelegenen eigentlichen Doppelpunkten nicht wiederum Doppelpunkte der Transformationskurve entsprechen, wohl aber den Spitzen. Um die Betrachtung zu vereinfachen, setzen wir deshalb voraus, dass unter den Durchgängen der Originalkurve durch irgend einen Fundamentalpunkt niemals zwei in der gleichen Richtung erfolgen. Es wird dann, wie bereits gefunden:

$$2\alpha = 3n^2 - 3n - 4an - 2bn - 2cn - 4dn + a + b + c + 2d + 2ab + 2ac + 4ad + a^2 + b^2 + c^2 + 2d^2.$$

Ferner weiss man, dass jeder der vier Grundpunkte des Kreisbüschels ein $(n-a)$facher, hingegen $\mathfrak{P}$ ein $(2n-b-c-2d)$facher Punkt der Transformationskurve ist. Infolgedessen wird:

$$\beta = 4\,\frac{(n-a)(n-a-1)}{2} + \frac{(2n-b-c-2d)(2n-b-c-2d-1)}{2}$$
$$= 4n^2 - 3n - 4an - 2bn - 2cn - 4dn + 2a + 2a^2 + \frac{b + c + 2d + (b+c+2d)^2}{2}$$

Es ist aber: $\omega = 2\alpha + \beta + 2\gamma$; daher:

$$\omega = 2 + 7n^2 - 6n - 4n[2a + b + c + 2d] + 3a + b + c + 2d + 2ab + 2ac + 4ad + 3a^2 + b^2 + c^2 + 2d^2 + \frac{b + c + 2d + (b+c+2d)^2}{2}.$$

Die Transformationskurve ist von der Ordnung: $4n - 2a - b - c - 2d$; die Maximalzahl $\varkappa$ ihrer Doppelpunkte bestimmt sich daher durch die Gleichung:

$$\varkappa = \frac{(4n-2a-b-c-2d-1)(4n-2a-b-c-2d-2)}{2}$$
$$= 8n^2 - 6n + 1 - 4n[2a + b + c + 2d] + 3a + b + c + 2d + 2ab + 2ac + 4ad + 2a^2 + \frac{b + c + 2d + (b+c+2d)^2}{2}.$$

Da aber: $\mathfrak{p} = \varkappa - \omega$, so erhält man schliesslich:

$$\mathfrak{p} = n^2 + 1 - 2\gamma - a^2 - b^2 - c^2 - 2d.^2$$

Es gilt nun aber für das Geschlecht p der Originalkurve die Gleichung:

$$2p = (n-1)(n-2) - 2\gamma - a(a-1) - b(b-1) - c(c-1) - 2d(d-1)$$
$$= n^2 - 3n + 2 - 2\gamma + a + b + c + 2d - a^2 - b^2 - c^2 - 2d^2.$$

Setzt man dies in die Gleichung für $\mathfrak{p}$ ein, so folgt:

$$\mathfrak{p} = 2p + 3n - 1 - a - b - c - 2d.^*)$$

Es gilt demnach der Satz:

*) Diese Gleichung lässt sich auch herleiten aus der allgemeinen Korrespondenzformel, wie sie Zeuthen zuerst entwickelt hat (Math. Ann. Bd. III pag. 150 ff.).

Das Geschlecht der Transformationskurve ist im allgemeinen gleich $2p+3n-1$; doch wird diese Zahl für jeden Durchgang der Originalkurve durch irgend einen Fundamentalpunkt um 1 vermindert.

§ 7. Rücktransformation.

Es wurde früher bereits hervorgehoben, dass zwischen Originalkurve und Transformationskurve bloss eine (1.2)-Korrespondenz besteht, wenigstens so lange die Punkte der Originalkurve nicht insgesamt derart liegen, dass je zwei Punkte sowohl von einer durch P gehenden Geraden als von einem Kreis des Büschels ausgeschnitten werden. In der (2,2)-Korrespondenz der Systeme S und $\mathfrak{S}$ entspricht daher der Transformationskurve nicht bloss die Originalkurve, sondern noch eine weitere Kurve, nämlich die der Originalkurve im gleichen System zugeordnete, die mit der Originalkurve in (1,1)-Korrespondenz steht. Anlässlich der Frage nach dem Geschlecht der Transformationskurve wurde auch bereits die Ordnung dieser mit der Originalkurve in (1.1)-Korrespondenz stehenden zugeordneten Kurve festgestellt; es ergab sich folgendes: Ist die Originalkurve (A) von der Ordnung n und geht sie a mal durch P, b mal durch Φ, c mal durch Φ', d mal durch jeden der unendlich fernen Kreispunkte, so ist die zugeordnete Kurve (A') von der Ordnung $3n-2a-b-c-2d$; sie geht $(2n-a-b-c-2d)$ mal durch P, $(n-a-b)$ mal durch Φ, $(n-a-c)$ mal durch Φ', $(n-a-d)$ mal durch jeden der unendlich fernen Kreispunkte. Die gesamte der Transformationskurve in der zwei-zweideutigen Beziehung gegenüberstehende Kurve ist also von der Ordnung $4n-2a-b-c-2d$; sie geht $(2n-b-c-2d)$ mal durch P, $(n-a)$ mal durch jeden der vier Grundpunkte des Kreisbüschels. Nun ist aber die Transformationskurve selbst von der Ordnung $4n-2a-b-c-2d$; ferner geht sie $(2n-b-c-2d)$ mal durch $\mathfrak{P}$, $(n-a)$-mal durch jeden der vier Grundpunkte des Kreisbüschels. Es gilt daher der Satz: Die Kurven, die sich in der zwei-zweideutigen Beziehung entsprechen, sind beide von der Ordnung $4n-2a-b-c-2d$; jede von beiden geht $(n-a)$ mal durch jeden der vier Grundpunkte des Kreisbüschels; die Kurve des Systemes S geht $(2n-b-c-2d)$ mal durch P, die Kurve des Systemes $\mathfrak{S}$ ebenso oft durch $\mathfrak{P}$. — Man übersieht auch leicht, dass bezüglich der Richtung, in der diese Durchgänge durch die Fundamentalpunkte erfolgen, für beide Systeme durchaus die gleichen Sätze gelten.

Die Klassenzahlen der beiden Kurven (A, A') und $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ sind unter den früheren Einschränkungen gleichfalls in einfacher Weise verknüpft. Die Klasse der Kurve (A') bestimmen wir, indem wir die Tangenten zählen, die von P an diese Kurve gehen. Von diesen Tangenten berühren $2n-a-b-c-2d$ in P

selbst, zählen also doppelt bei Berechnung der Klasse; mit Hilfe einer Betrachtungsweise ähnlich der früheren ergibt sich ferner, dass jede durch P gehende Gerade, die in einem nicht in P selbst gelegenen Punkt A Tangente ist zu Kurve (A), zugleich auch in dem zugeordneten Punkt A′ Tangente ist zur zugeordneten Kurve (A′); derartiger Tangenten gibt es $r-2a$. Damit sind jedoch alle Tangenten aufgezählt, die von P an die Kurve (A′) gehen: dieselbe ist daher von der $2(2n-a-b-c-2d)+r-2a = r+4n-4a-2b-2c-4d$. Die Originalkurve selbst ist von der Klasse r, di Gesamtkurve (A, A′) ist demnach von der Klasse $2r+4n-4a-2(b+c+2d)$. Die Transformationskurve ($\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$) hingegen ist nach dem früheren von der Klasse $2r+10n-6a-4(b+c+2d)$.

Die Frage endlich nach dem Geschlechte, das die Gesamtkurve (A, A′) besitzt, kann in dieser Form eigentlich nicht gestellt werden, da die Kurve (A, A′) zerfällt. Man wird jedoch das, was man bei nichtzerfallender Kurve das Geschlecht nennt, hier bei zerfallender Kurve beurteilen nach Ordnung und Geschlecht der einzelnen Teilkurven; nun ist aber Ordnung und Geschlecht der Teilkurve (A) bekannt, ebenso zunächst die Ordnung der Teilkurve (A′), und da beide Teilkurven eindeutig Punkt für Punkt auf einander bezogen sind, so sind sie nach dem Riemann'schen Satze von gleichem Geschlecht.

Curriculum vitae.

Am 2. Dezember 1878 wurde ich zu Landstuhl geboren. Ich besuchte die fünf Klassen der Lateinschule Landstuhl, die 6. Klasse des Humanistischen Gymnasiums Kaiserlautern und die drei oberen Klassen des Humanistischen Gymnasiums Speier, woselbst ich im Juli 1897 absolvierte. Hierauf studierte ich fünf Jahre lang an der Universität München, und zwar während der drei ersten Semester Philosophie und Theologie, während der sieben folgenden Semester Mathematik und Physik. Nachdem ich im Oktober 1902 den II. Abschnitt der Lehramtsprüfung für Mathematik und Physik bestanden hatte, fand ich an der Meteorologischen Centralstation zu München Verwendung als Assistent.

München, den 15. Januar 1903.

Joseph Wagner.